2.1 Задача оптимального виробництва фарб

Невелике підприємство випускає два типи фарб: для внутрішніх (І) та з нішніх (Е) робіт. Продукція обох типів поступає до оптової торгівлі. Для ви бництва фарб використовуються два вихідних продукти А та В. Максималь можливі добові запаси цих продуктів становлять 6 т і 8 т відповідно. Витрат та В на 1 т відповідних фарб наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані задачі про виробництво фарб

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів на 1 тонну фарби, т		Максимально можливий запа т
	Фарба Е	Фарба І	
А	1	2	6
В	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу І ніколи перевищує попит на фарбу Е більше, ніж на 1 т. Також встановлено, що по на фарбу І ніколи не перевищує 2 т на добу.

Оптові ціни однієї тонни фарби дорівнюють: 3000 грн. для фарби Е і 20 грн. для фарби І.

Яку кількість фарби кожного виду повинно виробляти підприємство, щ прибуток від її реалізації був максимальний?

Для вирішення цієї задачі необхідно побудувати математичну моде Процес побудови моделі можна розпочати з відповіді на наступні три запита ня:

- Для визначення яких величин будується модель? Іншими словами, щ змінними моделі?
- В чому є мета, для досягнення якої із множини усіх допустимих знач змінних вибираються оптимальні?
- Яким обмеженням повинні задовольняти невідомі?

У нашому випадку підприємству необхідно спланувати обсяг виробництва фарб так, щоб максимізувати прибуток. Тому змінними є

- x_I – добовий обсяг виробництва фарби І;
- x_E – добовий обсяг виробництва фарби Е.

Сумарний добовий прибуток від виробництва фарб становить

$z = 3000\, x_E + 2000\, x_I$.

Метою підприємства є визначення серед усіх допустимих значень x_E та x_I аких, які максимізують сумарний прибуток, тобто цільову функцію z.

Перейдемо до обмежень, що накладаються на x_E та x_I. Обсяг виробництва е може бути від'ємним, тобто

$x_E, x_I \ge 0$.

Витрати вихідного продукту для виробництва обох видів фарб не можуть еревищувати його максимально можливий запас, тобто

$x_E + 2x_I \le 6$,

$2x_E + x_I \le 8$.

Крім того, обмеження на величину попиту на фарбу мають вигляд:

$x_I - x_E \le 1$,

$x_I \le 2$.

Дана модель є лінійною, оскільки цільова функція і обмеження лінійно за ежать від змінних.

Порядок розв'язання задачі

1. Відвести клітки *А3* і *В3* під значення змінних x_E та x_I відповідно.
2. Ввести до клітки *С4* цільову функцію

*=3000*A3+2000*B3*

3. Ввести до кліток діапазону *А7:А10* ліві частини обмежень, а до діапазо у *В7:В10* відповідні праві частини обмежень.

Клітка	Формула	Клітка	Формула
A7	*=A3+2*B3*	*B7*	*=6*
A8	*=2*A3+B3*	*B8*	*=8*
A9	*=B3-A3*	*B9*	*=1*
A10	*=B3*	*B10*	*=2*

4. Вибрати команду **Сервис | Поиск решения** та заповнити діалогове в
но відповідно до умов завдання.

2.2 Транспортна задача

Фірма має 4 підприємства і 5 центрів розподілу товарів. Підприємства р ташовані в містах A, B, C, D зі щоденними виробничими потужностями, вказано в табл.2. Центри розподілу товарів знаходяться в містах K, L, M, N, мають щоденну потребу у кількостях одиниць обладнання, які вказані в цій табл. Зберігання на підприємстві не поставленої до центру одиниці продук обходиться в 5 грн., а штраф за невиконання в строк поставки замовлен центру продукції, але якої там немає, дорівнює 15 грн. щоденно. Вартість п везення одиниці продукції з підприємств до центрів розподілу також наведе табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Транспортні витрати, грн./одиницю продукції

	K	L	M	N	P	Вироб ництв шт.
A	7	10	8	12	13	200
B	15	10	8	5	7	150
C	10	7	7	8	8	225
D	10	3	8	8	8	175
Потреба, шт.	100	200	50	250	150	

Необхідно спланувати перевезення так, щоб мінімізувати сумарні транс ртні витрати.

Важливо зазначити, що оскільки дана модель збалансована, тобто сумар ий обсяг виробленої продукції дорівнює сумарному обсягу потреб в ній, то в аній моделі немає необхідності враховувати витрати, пов'язані як зі складу нням, так і з недопоставкою продукції. У противному ж випадку до моделі обхідно ввести:

- у випадку перевиробництва – фіктивний пункт розподілу; вартість перевезення одиниці продукції до нього приймається рівною вартості складуван , а обсяги перевезення до цього пункту дорівнюють обсягам складування длишків продукції на підприємствах;
- у випадку дефіциту – фіктивне підприємство; вартість перевезення оди иці продукції із фіктивного підприємства приймається вартості штрафів за не поставку продукції, а обсяги перевезень на цьому підприємстві дорівнюють сягам недопоставленої продукції до центрів розподілу.

Для розв'язання задачі побудуємо її математичну модель.

Невідомими є обсяги перевезень. Нехай x_{ij} – обсяги перевезень з i-го під приємства до j-го центру розподілу. Цільовою функцією є сумарні транспортні трати, тобто

$$z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij},$$

де c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції з i-того підприємства до j- центру розподілу. Крім того, невідомі повинні задовольняти таким обмежен м:

- невід'ємність обсягів перевезень

$$x_{ij} \geq 0, i \in [1,4], \;\; j \in [1,5];$$

- оскільки модель збалансована, то вся продукція має бути вивезена з дприємств і потреба усіх центрів розподілу має бути задоволена

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j, \;\; j \in [1,5],$$

де a_i – обсяг виробництва на i-му підприємстві, b_j – попит в j-му це

розподілу.

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i,\ i \in [1,4].$$

Порядок розв'язання задачі

1. Ввести до кліток *B3:F6* вартості перевезень.
2. Відвести клітки *B8:F11* під значення невідомих (обсяги перевезень)
3. Ввести до кліток *H8:H11* обсяги виробництва на підприємствах.
4. Ввести до кліток *B13:F13* потребу в продукції в центрах розподілу.
5. До клітки *B16* ввести цільову функцію

=СУММПРОИЗВ (B3:F6, B8:F11).

6. До кліток *G8:G11* ввести формули для розрахунків обсягів виробни на підприємствах, а до кліток *B12:F12* обсяги продукції, що доставляєтьс пунктів розподілу:

Клітка	**Формула**	**Клітка**	**Формула**
G8	*=СУММ(B8:F8)*	*B12*	*=СУММ(B8:B11*
G9	*=СУММ(B9:F9)*	*C12*	*=СУММ(C8:C1*
G10	*=СУММ(B10:F10)*	*D12*	*=СУММ(D8:D1*
G11	*=СУММ(B11:F11)*	*E12*	*=СУММ(E8:E11*
		F12	*=СУММ(F8:F11*

7. Вибрати команду **Сервис | Поиск решения** та заповнити діалогове но відповідно до умов завдання.

2.3 Варіанти транспортної задачі

Проміжні пункти

Досить часто необхідно при транспортуванні вантажів перевезти їх чер треті пункти.

Нехай в n пунктах виробництва A_i з потужністю a_i знаходиться вантаж, ий необхідно завести до p складів D_k з ємністю d_k., а звідти доставити до m оживачів B_j з обсягом споживання b_j. Необхідно знайти оптимальну схему ревезень, при якій загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Якщо сумарна ємність складів дорівнює сумарній потужності виробників і марному обсягу споживання

$$\sum_{k=1}^{p} d_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j,$$

місткість кожного складу буде використано повністю і схема перевезень ва-ажу зі складу до споживача не буде залежати від схеми перевезень від вироб-ика на склади. У цьому випадку задачу можна розв'язати по частинах – окре-) знайти оптимальні схеми поставок продукції на склад від виробника і зі ладу споживачеві.

Справа суттєво змінюється, якщо місткість складів більша за сумарну по-жність виробників

$$\sum_{k=1}^{p} d_k > \sum_{i=1}^{n} a_i$$

о ж за сумарний обсяг споживання

$$\sum_{k=1}^{p} d_k > \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Розглянемо перший випадок, коли продукції виробляється менше, ніж міс-ість складів, але виробництво і попит збалансовані, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Задачу можна розв'язувати в два етапи старим способом і збалансувати її, івши спочатку фіктивного виробника для задоволення попиту на складах, а тім слід ввести фіктивного споживача, оскільки операція першого етапу призведе до того, що на складах продукції стане більше, ніж споживається. Оч дно, що знайдене таким чином рішення скоріш за все буде не оптималь оскільки для побудови моделі довелося робити припущення, які суттєво нюють умови задачі.

Тому пропонується так званий спосіб Ордена-Маша. Окрім виробни споживачів продукції до таблиці вводять проміжні пункти (склади), прич для кожного пункту відводять окремий рядок і окремий стовпчик. В ря вказується "потужність" складу, а в стовпчиках – "потреба" складу.

Нехай кількість виробників продукції $n=2$, кількість споживачів $m=4$, лькість складів $p=3$.

Сама матриця (табл.2.3) складається з чотирьох частин. У першій, верхній частині, розміром $n \times p$ вказуються вартості перевезень c_{ik} між виро ками продукції A_i та складами D_k. Аналогічно вартості перевезень c'_{kj} зі скл D_k до споживачів продукції B_j вказуються в четвертій, правій нижній част яка має розмір $p \times m$.

Таблиця 2.3 – Матриця для задачі з проміжними пунктами

Виробники і проміжні пункти	Потужність	Споживачі і проміжні пункти					
		D1	D2	D3	B1	B2	B3
		d1	d2	d3	b1	b2	b3
A1	a1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	M	M	M
A2	a2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	M	M	M
D1	d1	0	M	M	c'_{11}	c'_{12}	c'_{13}
D2	d2	M	0	M	c'_{21}	c'_{22}	c'_{23}
D3	d3	M	M	0	c'_{31}	c'_{32}	c'_{33}

Друга, права верхня частина матриці, відноситься до зв'язків виробни споживачами продукції. Оскільки прямі зв'язки за умовами задачі заборо то до всіх клітинок слід ввести максимальну вартість M у вигляді штрафно нкції.

Найбільш цікавим є третій, лівий нижній блок матриці, який утворюється ками і стовпчиками, що відносяться до складів. Цей блок завжди має форму драту. Оскільки перевезення зі складу на склад безглузді, то відповідні клітки також блокуються максимальною вартістю M. Однак в клітинках, які характеризують "зв'язок" складу з самим собою показники вартості прийняті рівни нулю. При будь-якому розташуванні блоків матриці такі клітинки будуть ходитися на діагоналі відповідного блоку. Задаючи відповідні нулі, в моделі зволяються" поставки продукції до цього складу і вони будуть означати мір невикористаної місткості складу. Оскільки насправді цих поставок не е, то вони є фіктивними. У зв'язку з цим даний спосіб вирішення транспорї задачі ще називають способом фіктивної діагоналі.

Трьохетапна задача

Ми розглянули варіант двоетапної задачі, коли поставка продукції йде від обника до споживача через проміжні пункти. Аналогічно розв'язується за а з поставкою через кілька проміжних пунктів, для кожного з яких додатко зводяться рядки і стовпчики. У табл.2.4 наведено вигляд матриці для постав за схемою: виробник A – склад D – склад E – споживач B.

Таблиця 2.4 – Матриця для трьохетапної задачі

обники і міжні пункти	Потужність	Споживачі і проміжні пункти						
		D1	D2	D3	E1	E2	B1	B2
		d1	d2	d3	e1	e2	B1	B2
A1	a1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	M	M	M	M
A2	a2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	M	M	M	M
D1	d1	0	M	M	c'_{11}	c'_{12}	M	M
D2	d2	M	0	M	c'_{21}	c'_{22}	M	M
D3	d3	M	M	0	c'_{31}	c'_{32}	M	M
E1	e1	M	M	M	0	M	c''_{11}	c''_{12}
E2	e2	M	M	M	M	0	c''_{21}	c''_{22}